Démonstration des lois de Kepler à l'aide du calcul différentiel et intégral

Serge Robert
Cégep de Saint-Jean-sur-Richelieu

Introduction

Johannes Kepler est un astronome allemand qui vécut de 1571 à 1630. Né de parents pauvres, il obtint une bourse pour étudier le culte luthérien, mais il en fut exclus un peu plus tard à cause de ses positions religieuses. Son refus d'adhérer au christianisme s'ajouta à ses problèmes et après un édit contre les protestants, il se réfugia à Prague auprès de l'astronome danois Tycho Brahe. Celui-ci le chargea de calculer le mouvement de la planète Mars en utilisant les innombrables données qu'il avait déjà accumulées.

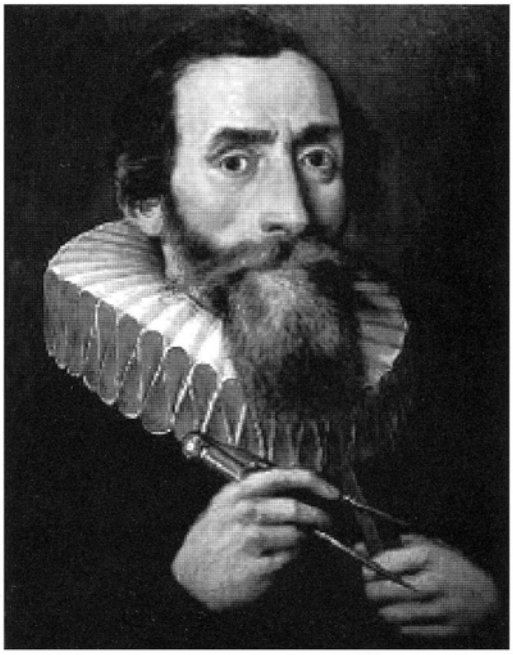

Figure 1[1]

Kepler découvrit que l'orbite de Mars était une ellipse et publia ses résultats en 1609 dans *Astronomia Nova*. Après plusieurs ennuis dans sa vie privée, où il perdit femme et enfants, il retourna en Allemagne et publia en 1619 *Harmonices Mundi* dans lequel il énonce sa troisième loi.[2] Voici les fameuses lois de Kepler.

Première loi : *Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont l'un des foyers est le Soleil.*

Deuxième loi : *La droite joignant le centre du Soleil au centre d'une planète balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux.*

Troisième loi : *Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi grand axe de l'ellipse.*

Newton fut le premier à donner une véritable démonstration des lois de Kepler ; cela consacrait en quelque sorte ses nouvelles théories sur le calcul différentiel et intégral et sur sa loi de la gravitation universelle.

Dans les démonstrations qui vont suivre, nous utiliserons la seconde loi de Newton sous sa forme vectorielle : la somme des forces appliquées sur un objet de masse m est égale à sa masse multipliée par le vecteur accélération :

$$\sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \, .$$

Le vecteur *accélération* se calcule en dérivant deux fois le vecteur *position* :

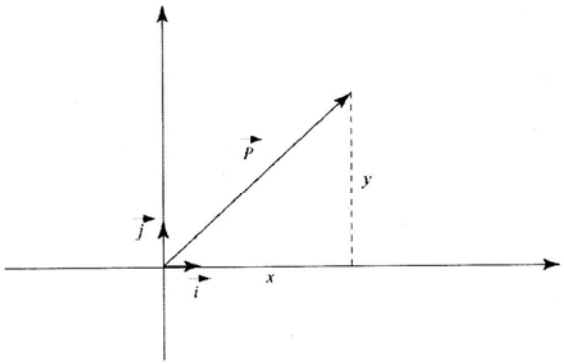

Figure 2

$$\vec{P} = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j}\ ,$$

$$\vec{v} = x'(t)\cdot\vec{i} + y'(t)\cdot\vec{j}\ ,$$

$$\vec{a} = x''(t)\cdot\vec{i} + y''(t)\cdot\vec{j}\ .$$

1. Démonstration de la seconde loi de Kepler

Nous allons commencer par démontrer la seconde loi de Kepler et ce comme corollaire du théorème suivant :

Théorème 1. *Si une masse se déplace dans un champ de force central, en l'absence de toute autre force, le vecteur position décrit des aires égales en des temps égaux.*

Démonstration : On place l'origine du système de référence au centre de force et on utilise les coordonnées polaires.

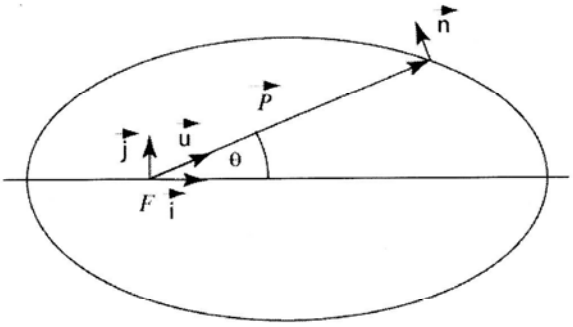

Figure 3

$$\vec{P} = r(t)\cos\theta(t)\cdot\vec{i} + r(t)\sin\theta(t)\cdot\vec{j}\ ,$$

$$\vec{v} = \left[r'(t)\cos\theta - r(t)\sin\theta\cdot\theta'(t)\right]\cdot\vec{i} + \left[r'(t)\sin\theta + r(t)\cos\theta\cdot\theta'(t)\right]\cdot\vec{j}\ ,$$

$$\vec{a} = \left[r''\cos\theta - r'\sin\theta\cdot\theta' - r'\sin\theta\cdot\theta' - r\cos\theta\cdot(\theta')^2 - r\sin\theta\cdot\theta''\right]\cdot\vec{i}$$
$$+\left[r''\sin\theta + r'\cos\theta\cdot\theta' + r'\cos\theta\cdot\theta' - r\sin\theta\cdot(\theta')^2 + r\cos\theta\cdot\theta''\right]\cdot\vec{j}$$

Le vecteur radial unitaire est : $\vec{u} = \cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}$ et le vecteur normal unitaire, $\vec{n} = -\sin\theta\cdot\vec{i} = \cos\theta\cdot\vec{j}$. On peut alors réécrire le vecteur accélération ainsi :

$$\vec{a} = \left[r'' - r(\theta')^2\right]\cdot(\cos\theta\cdot\vec{i} + \sin\theta\cdot\vec{j}) + \left[2r'\theta' + r\theta''\right]\cdot(-\sin\theta\cdot\vec{i} + \cos\theta\cdot\vec{j})$$

$$\vec{a} = \left[r'' - r(\theta')^2\right]\cdot\vec{u} + \left[2r'\theta' + r\theta''\right]\cdot\vec{n}\ . \tag{1}$$

Comme la seule force en présence est radiale, la composante normale est nulle :

$$2\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0\,.$$

Multiplions l'équation par r :

$$2r\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} + r^2\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0\,.$$

Cela devient une dérivée exacte :

$$\frac{d}{dt}\left[r^2\cdot\frac{d\theta}{dt}\right] = 0\,.$$

On en déduit que :

$$r^2\cdot\frac{d\theta}{dt} = k \ \text{ où } \ k \ \text{ est une constante.}$$

Désignons par A l'aire balayée par le vecteur position pendant l'intervalle de temps

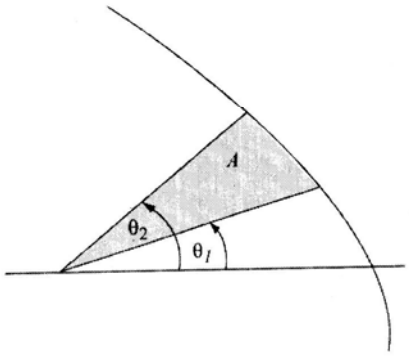

Figure 4

Un élément d'aire en coordonnées polaires est : $\Delta A \approx r \cdot \Delta\theta \cdot \Delta r$,

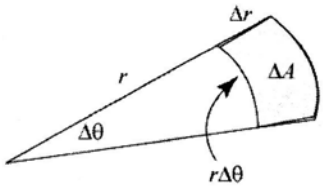

Figure 5

De telle sorte que :

$$A = \iint_{\Re} r dr d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

Mais comme $r^2 d\theta = k dt$, il s'ensuit que

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} k dt = \frac{k}{2}(t_2 - t_1) .$$

Le vecteur position balaie des aires égales en des temps égaux.

C.Q.F.D.

Nous voyons que la seule condition utilisée dans cette démonstration est que le champ de force soit central et qu'il n'y ait pas d'autres forces en présence.

2. Démonstration de la première loi de Kepler

Pour démontrer les deux autres lois Kepler nous aurons besoin de la loi de la gravitation universelle de Newton :

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} .$$

En fait, il suffit que la force soit inversement proportionnelle au carré de la distance. Cette idée était déjà dans l'air depuis un certain temps, ce n'est pas Newton qui l'a inventée[3]. Elle s'explique facilement pour un champ de force qui rayonne dans l'espace à partir d'un point central : comme la surface d'une sphère est $4\pi r^2$, la densité des lignes de force est inversement proportionnelle au carré de la distance. Entre autres, cela est vrai pour la gravitation, pour les champs électriques et pour l'intensité d'une source lumineuse.

La première loi de Kepler sera une conséquence du théorème suivant :

Théorème 2. *Si un objet se déplace dans un champ de force central inversement proportionnel au carré de la distance entre le centre de l'objet et le centre de force, alors la trajectoire suivie par l'objet est une conique.*

Démonstration : Cette démonstration est la suite de la démonstration précédente. La force de gravité est radiale et dirigée vers le centre ; à partir de la formule du vecteur accélération obtenue en (1), nous obtenons :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{K}{r^2} .$$

Et, comme $r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = k$, il s'ensuit que :

(2) $$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{k^2}{r^3} = -\frac{K}{r^2} .$$

Comme le but est de trouver la trajectoire décrite par l'objet, il faut trouver r en fonction de θ plutôt qu'en fonction du temps. De plus, nous effectuerons le changement de variable $u = \frac{1}{r}$.

Comme $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}$ et $\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$, il s'ensuit que :

$$-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{k}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = -k \cdot \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[-k \cdot \frac{du}{d\theta}\right] = \frac{d}{d\theta}\left[-k \cdot \frac{du}{d\theta}\right] \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \cdot \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \frac{k}{r^2} = -\frac{k^2}{r^2} \cdot \frac{d^2 u}{d\theta^2} .$$

En portant cette expression dans l'équation différentielle (2), nous obtenons :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{K}{k^2}. \tag{3}$$

C'est une équation linéaire d'ordre 2 non-homogène de la forme $ay''+by'+cy=c$. Ce type d'équation est étudié en Calcul III [4]. On commence par trouver la solution générale de l'équation homogène $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=0$.

Pour ce, on calcule le discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta=b^2-4ac=-4$. Comme sa valeur est négative, on aura comme solution

$$u=K_1e^{\alpha\theta}\sin(\beta\theta)+K_2e^{\alpha\theta}\cos(\beta\theta)$$

où

$$\alpha=-\frac{b}{2a},$$

qui donne 0 dans ce cas-ci, et

$$\beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

qui donne 1. On obtient donc

$$u(\theta)=K_1\sin\theta+K_2\cos\theta$$

pour l'équation homogène. Il suffit de trouver une solution particulière à l'équation non-homogène et de les additionner. Ainsi,

$$u(\theta)=K_1\sin\theta+K_2\cos\theta+\frac{K}{k^2}$$

est la solution de l'équation (3).

Si nous plaçons l'axe des coordonnées polaires de telle sorte que $r(\theta)$ soit minimal lorsque $\theta=0$, $u(\theta)$ devrait être alors maximal, ce qui donne $K_1=0$ et, puisque $u''(0)=-K_2<0, K_2>0$. Ainsi,

$$u(\theta)=K_1\sin\theta+K_2\cos\theta+\frac{K}{k^2}$$

$$r(\theta)=\frac{1}{K_2\cos\theta+\frac{K}{k^2}}. \tag{4}$$

Comme nous allons le voir, cela représente l'équation d'une conique en coordonnées polaires.

C.Q.F.D.

3. Équation des coniques en coordonnées polaires

Les coniques peuvent toutes être définies en fonction d'un point F (dit le foyer), d'une droite Δ (dite droite directrice) et d'un nombre positif e (appelé excentricité) :

$$d(P,F)=e\cdot d(P,\Delta)$$

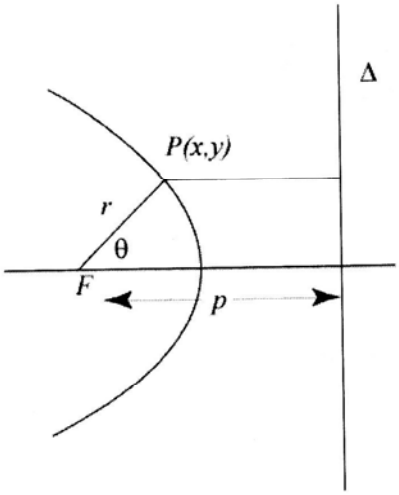

Figure 6

Dans le cas d'une parabole, $e=1$; dans le cas d'une ellipse, $e=\frac{c}{a}<1$ et dans le cas d'une hyperbole, $e=\frac{c}{a}>1$[5]. Le cercle est un cas limite où la droite directrice est à l'infini et l'excentricité est nulle.

Trouvons maintenant l'équation d'une conique en coordonnées polaires en plaçant le pôle au foyer et en prenant l'axe perpendiculaire à la droite directrice.

$$d(P, F) = e \cdot d(P, \Delta)$$

On voit que

$$d(P, F) = r \text{ et } d(P, \Delta) = p - x = p - r\cos\theta\,;$$

d'où,

$$r = e \cdot (p - r\cos\theta) = ep - er\cos\theta$$

(5) $$r = \frac{e \cdot p}{1 + e \cdot \cos\theta}.$$

L'équation (4) peut se ramener à cette forme ; il s'agit donc d'une conique.

(6) $$r(\theta) = \frac{1}{K_2\cos\theta + \frac{K}{k^2}} = \frac{1}{\frac{K}{k^2} \cdot \left(1 + \frac{K_2 k^2}{K}\cos\theta\right)} = \frac{\frac{k^2}{K}}{1 + \frac{K_2 k^2}{K}\cos\theta}$$

avec $e = \frac{K_2 k^2}{K}$. Cela complète la démonstration du théorème 2.

Pour achever la démonstration de la première loi de Kepler, examinons les situations possibles. Si un objet entre dans un champ gravitationnel quelconque, il peut se produire trois cas : si sa vitesse linéaire est suffisamment grande, il sera dévié par le champ de force sur une hyperbole et poursuivra sa route sur une des droites asymptotiques.

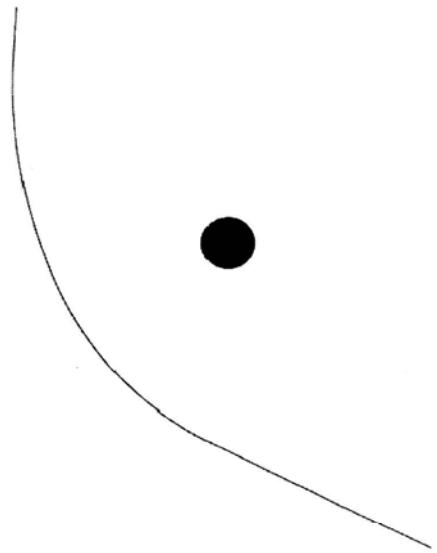

Figure 7

Par contre, si la vitesse de l'objet est comprise entre certaines valeurs, il entrera en orbite sur une ellipse autour de l'astre, sa vitesse déterminera les valeurs de a et de b. Dans le cas d'un satellite, cela déterminera l'altitude à laquelle il tournera.

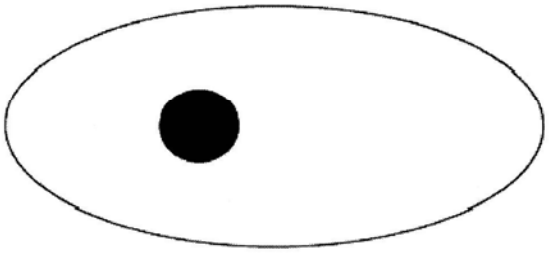

Figure 8

Finalement, si sa vitesse n'est pas assez grande, il s'écrasera sur l'astre en décrivant une parabole. C'est ce qui est arrivé à deux reprises aux satellites de la NASA sur Mars.

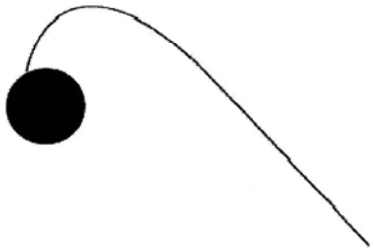

Figure 9

Comme la trajectoire des planètes autour du Soleil est fermée, on peut conclure qu'il s'agit d'ellipses, ce qui termine la démonstration de la première loi de Kepler.

4. Démonstration de la troisième loi de Kepler

Démontrons maintenant la troisième loi, en poursuivant la même démarche que dans les deux autres démonstrations.

Supposons que la trajectoire soit une ellipse ; l'équation (6) peut alors s'écrire sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{k^2}{K(1 + e\cos\theta)}.$$

La distance minimale de r sera atteinte lorsque le cosinus atteint son maximum à $\theta = 0$; d'où

$$r_{\min} = \frac{k^2}{K(1+e)}$$

et la valeur maximale sera atteinte lorsque le cosinus atteint son minimum à $\theta = \pi$:

$$r_{\min} = \frac{k^2}{K(1-e)}.$$

Soient P le point le plus rapproché du foyer F_2 et P' le plus éloigné ;

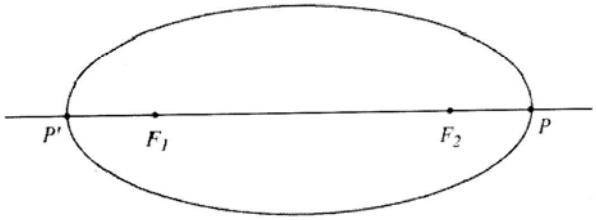

Figure 10

$$PF_2 + P'F_2 = 2a$$

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{k^2}{K(1-e^2)}.$$

Dans une ellipse, l'excentricité est égale à c/a, où c est la distance focale et $c^2 = a^2 - b^2$. Ainsi,

$$1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

d'où

$$a = \frac{k^2}{K \cdot \frac{b^2}{a^2}} = \frac{k^2 \cdot a^2}{K \cdot b^2}$$

$$b^2 = \frac{k^2 a}{K}.$$

Soit T la période d'une révolution complète ; comme il a été démontré précédemment, l'aire balayée par le vecteur position entre le temps t_1 et le temps t_2 est donnée par la formule

$$A = \frac{k}{2}(t_2 - t_1).$$

L'aire totale de l'ellipse étant πab, nous obtenons :

$$\pi ab = \frac{1}{2}kT,$$

$$T = \frac{2\pi ab}{k},$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{k^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{k^2} \cdot \frac{k^2 a}{K} = \frac{4\pi^2}{K} \cdot a^3,$$

ce qui démontre la troisième loi de Kepler.

On peut faire refaire à des étudiants de Calcul III toutes ces démonstrations (en donnant évidemment beaucoup d'indications) comme travail de session dans le cadre de l'activité d'intégration. C'est un bel exemple de lien entre la physique et les mathématiques. En leur faisant faire une introduction historique plus détaillée, on touchera aussi à l'histoire des sciences. ■

Notes

[1] Photo tirée du site internet http://www.kepler.arc.nasa.gov/johannes.html ; elle provient du musée autrichien *der Sterwarte Kremsmünster*.

[2] On peut consulter la référence [1] pour en savoir plus sur Kepler.

[3] On peut consulter [6], un magnifique livre consacré à la vie de Newton.

[4] Pour plus de détails sur cette méthode, on peut consulter la référence [3], pages 307 et suivantes.

[5] Le lecteur aura deviné que a représente le demi-axe horizontal et b, le demi-axe vertical, dans le cas d'une ellipse. Pour les équations des coniques en coordonnées cartésiennes et pour une étude plus détaillée de celles-ci, on peut consulter la référence [4].

Références bibliographiques

[1] Koyré, A. (1961). *La révolution astronomique, Copernic, Kepler, Borelli*. Paris, Hermann.

[2] Piskounov, N. (1980). *Calcul différentiel et intégral, Tomes I et II*. Moscou, Éditions Mir.

[3] Robert, S. (1992). *Calcul différentiel et intégral*. Saint-Jean (CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu, Les productions FRP.

[4] Robert, S. (1995). *Algèbre, trigonométrie et géométrie analytique*. Saint-Jean (CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu, Les productions FRP.

[5] Tierny, J. A. (1985). *Differential equations*. Boston (MA), Allyn and Bacon inc.

[6] Westfall, R. (1994). *Newton*. Paris, Flammarion.

Serge Robert
Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu
30, boulevard du Séminaire, C.P. 1018
Saint-Jean-sur-Richelieu (Québec)
J3B 7B1

Serge.Robert@cstjean.qc.ca

Souscription au Fonds Maurice-L'Abbé pour les camps mathématiques

Oui ! Je désire contribuer au financement des camps mathématiques.

❑ 20 $	❑ 30 $	❑ 50 $	❑ 100 $	_____ AUTRES

Nom : _____
Adresse : _____
_____
Code postal : _____

❑ PAR CHÈQUE À L'ORDRE DE L'AMQ
❑ VISA ❑ MASTER CARD Date d'expiration : _____
NO. DE LA CARTE : _____
SIGNATURE : _____

Pour 20 $ ou plus, ou sur demande, vous recevrez un reçu pour fin d'impôt.
NE : 12 577 5858 RR 0001

❑ Je désire recevoir un reçu pour fin d'impôt

7 400, boulevard Saint-Laurent, bureau 257, Montréal (Québec) H2R 2Y1 — 514-278-4263